Алғы сөз

Жоғары математиканың ғылыми зерттеу жұмыстарына және түрліше қажетті есептерді шешуге қолданатын салаларының бірі-интегралдық теңдеулер.

XIX ғасырдың басында интегралдық теңдеулерге байланысты ғылыми жұмыстар бірен-саран ғана кездессе, ал осы ғасырдың аяғында көптеген ғалымдардың /Абель, Фурье, Луивиль, Фредгольм, Вольтерра т.б./ терең мазмұнды еңбектерінің арқасында ол математиканың үлкен бір саласы болып қалыптасты. Көптеген есептердің шешулері әр түрлі интегралдық теңдеулер мен интегралдық теңдеулер жүйесіне келтірілді.

Қазіргі уақытта интегралдық теңдеулер көптеген тараулардан тұратын, өзіндік ерекше зерттеу тәсілдерімен танылған қолданбалы есептерде жиі қолданылатын математиканың негізгі салаларының бірі ретінде қалыптасқан. Сондықтан интегралдық теңдеулер жоғары математиканың негізгі бөлімдерінің бірі ретінде университеттер мен жоғарғы оқу орындарының физика-математика факультеттерінде және математика теренірек өтілетін жоғары техникалық университеттерінде оқытылады.

Ұсынылып отырған есептер жинағы авторлардың 1994 жылы – баспасынан жарық көрген “Интегралдық теңдеулер” атты кітаптарына қосымша құрал болып есептеледі. Бұл есептер жинағында интегралдық ұғымдар берілген, сонымен қатар арнайы есептер талданып, теңдеулердің шешу жолдары көрсетілген.

I ТАРАУ
ВОЛЬТЕРРАНЫҢ ИНТЕГРАЛДЫҚ ТЕҢДЕУЛЕРІ
§1. ИНТЕГРАЛДЫҚ ТЕҢДЕУЛЕРДІ ТОПТАСТЫРУ

1.1-анықтама. Интеграл астында белгісіз функциясы болатын теңдеуді интегралдық теңдеу деп атайды.

Егер белгісіз функция сызықты түрде енсе, онда интегралдық теңдеу сызықтық деп аталады. Мына

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b K(x,s)\varphi(s)ds + f(x), \quad a \le x \le b \qquad (1.1)$$

өрнегі сызықтық интегралдық теңдеу. Мұндағы $\varphi(x)$ - нақты айнымалы x аргументіне тәуелді белгісіз функция, ал $f(x)$ функциясы $[a,b]$ кесіндісіндегі, $K(x,s)$ функциясы $D = \{a \le x, s \le b\}$ төртбұрышында анықталған белгілі функциялар; $f(x)$ пен $k(x,s)$- интегралдық теңдеулердің бос мүшесі мен өзегі, ал λ - параметр.

1.2 –анықтама. (1.1) түріндегі теңдеуді Фредгольмнің 2-текті интегралдық теңдеуі деп атайды.

Мұндағы интегралдау шекарасы a мен b жалпы жағдайда тұрақты шамалар: олар шектелген де, шектелмеген де болуы мүмкін.

Егер жоғарыдағы (1.1) интегралдық теңдеудегі $f(x) = 0$ болса, онда ол теңдеу біртекті, ал $f(x) \ne 0$ жағдайда біртекті емес деп аталады.

Фредгольмнің 1-текті интегралдық теңдеуінде белгісіз функция интегралдық мүшеде ғана қатынасады, яғни

$$\int_a^b K(x,s)\varphi(s)ds = f(x) \qquad (1.2)$$

деп жазуға болады.

1.3-анықтама. Вольтерраның 2-текті интегралдық теңдеуі деп

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b K(x,s)\varphi(s)ds \times f(x) \qquad (1.3)$$

теңдеуін айтады, ал

$$\int_a^b K(x,s)\varphi(s)ds = f(x) \qquad (1.4)$$

Вольтерранын 1-текті интегралдық теңдеуі.

Кейбір жағдайларда Вольтерраның 1-текті теңдеуін 2-текті Вольтерраның теңдеуіне келтіріп қарастыру ыңғайлы болады. Мәселен, (1.4) теңдеудегі $K(x,s)$, $K'_x(x,s)$, $f(x)$ және $f'(x)$ функциялар $a \le x, s \le b$ төртбұрышты аймақта үзіліссіз болсын. Айтылған теңдеуді x айнымалысы бойынша дифференциалдап,

$$K(x,x)\varphi(x) + \int_a^x \frac{\partial}{\partial x} K(x,s)\varphi(s)ds = f'(x)$$

өрнегін аламыз. Егер $[a,b]$ кесіндісінде $K(x,x) \ne 0$ болса, онда

$$\varphi(x) = \int_a^x \frac{K'_x(x,s)}{K(x,x)} \cdot \varphi(s)ds + \frac{f'(x)}{K(x,x)}$$

Вольтерраның 2-текті интегралдық теңдеуі шығады. Ал егер $K(x,x) = 0$ болып, $K(x,s)$ өзектің жоғарғы ретті туындысы $K_x^m(x,x) \ne 0$ $(m \ge 1)$ табылса, онда жоғарыдағы амалды қайталай отырып, нәтижесінде бәрі-бір екінші текті теңдеуге келтіруге болады.

Бұдан былай жоғарғыдағы интегралдық теңдеулердегі берілген бос мүше $f(x)$ пен $K(x,s)$-ті өзекті үзіліссіз немесе квадраттарымен интегралданатын функциялар деп

$$\int_a^b |f(x)|^2 dx < +\infty, \qquad (1.5)$$

$$\int_a^b \int_a^b |K(x,s)|^2 dxds < +\infty, \qquad (1.6)$$

яғни $f(x)$, $K(x,s) \in L_2[a,b]$ деп ұйғарамыз. (1.6) шартын қанағаттандыратын $K(x,s)$ функциясын Фредгольм өзегі деп атайды.

Енді Фредгольм өзектеріне мысалдар келтірейік.

1-мысал. $K(x,s) = xs, a \le x, s \le b,$ мұндағы a,b -ақырлы сандар.

$$\int_a^b \int_a^b x^2 s^2 dxds = \int_a^b x^2 dx \int_a^b s^2 ds = \frac{1}{9}\left(b^3 - a^3\right)^2.$$

Егерде a,b сандарының ең болмағанда біреуі шексіз болса, онда жоғарғы тұжырым дұрыс болмайды.

2-мысал. $K(x,s) = \dfrac{\sqrt{xs}}{x^2+s^2}, a = 0, b = 1$ болсын.

Ендеше

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{xs}{(x^2+s^2)^2} dxds = \frac{1}{2}\int_0^1 xdx \int_0^1 \frac{d(x^2+s^2)}{(x^2+s^2)} = \frac{1}{4}\left[\int_0^1 \frac{dx^2}{x^2} - \int_0^1 \frac{d(x^2+1)}{x^2+1} - \right],$$

демек, бұл өзек Фредгольм өзегі болмайды, ал егер $a = -1, b = 1$болса, онда ол Фредгольм өзегі болады, себебі

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{xs}{(x^2+s^2)^2} dxds = \frac{1}{2}\int_{-1}^1 xdx \int_{-1}^1 \frac{d(x^2+s^2)}{(x^2+s^2)^2} = 0,$$

Яғни бұл жағдайда $\dfrac{\sqrt{xs}}{x^2+s^2}$ - Фредгольм өзегі.

1.4-анықтама. Егер $\varphi(x)$ функциясын интегралдық теңдеуге қойған кезде ол теңбе-теңдікке айналатын болса, онда $\varphi(x)$ функциясын интегралдық теңдеудің шешімі деп атайды.

1-мысал. $\varphi(x) = \sin x$ функциясы

$$\varphi(x) = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x-s)\varphi(s)ds - \frac{2}{\pi}\cos x$$

Фердгольмнің 2-текті интегралдық теңдеуінің шешімі болатынын анықтау керек.

Шешуі: Теңдеуге $\varphi(x) = \sin x$ функциясын қоямыз

$$\varphi(x) = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x-s)\sin ds - \frac{2}{\pi}\cos x \Leftrightarrow \sin x = -\frac{2}{\pi}\cos x + \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} [\cos x \cos s + \sin x \sin s]\sin sds \Leftrightarrow$$

$$\sin x = -\frac{2}{\pi}\cos x + \frac{4}{\pi}\left[\frac{1}{2}\cos x + \frac{\pi}{4}\sin x\right] \Leftrightarrow \sin x = \sin x.$$

2-мысал. $\int_0^x (x+s)\varphi(s)ds = \frac{16}{15}x^{\frac{5}{2}}$ теңдеуінің шешімі $\varphi(x) = \sqrt{x}$ екенін көрсетейік.

Расында да, белгісіз функцияның орнына $\sqrt{x}$ шешімін қойсақ

$$\frac{16}{15}x^{\frac{5}{2}} = \int_0^x (x+s)\sqrt{s}ds \Leftrightarrow \frac{16}{15}x^{\frac{5}{2}} = \left(x\cdot\frac{2s^{\frac{3}{2}}}{3} + \frac{2}{5}s^{\frac{5}{2}} \right)\Bigg|_0^x = \frac{16}{15}x^{\frac{5}{2}}.$$

3-мысал. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x+s)\varphi(s)ds = \frac{1}{2}\cos x - \frac{\pi}{4}\sin x$ теңдеуінің шешімі $\varphi(x) = \sin x$ функциясы болады. Тексеріп көрейік:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x+s)\sin ds = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x\cos s - \sin x\sin s)\sin sds =$$

$$= \frac{\cos x}{2}\left(-\frac{\cos 2s}{2} \right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} - \sin x\left[\frac{s}{2} - \frac{\sin 2s}{4} \right]\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}\cos x - \frac{\pi}{4}\sin x.$$

§2. ИНТЕГРАЛДЫҚ ЖӘНЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕҢДЕУЛЕР

1.Тұрақты коэффициентті дифференциалдық теңдеулер үшін Кошидің кейбір есептерін Вольтерраның екінші текті интегралдық теңдеуіне келтіру.

1-мысал.

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = f(x) \qquad (2.1)$$

теңдеуінің

$$y(0) = a_0, \;\; y'(0) = a_1 \qquad (2.2)$$

бастапқы шарттарын қанағаттандыратын шешімін табу керек.

Ол үшін $y''(x) = \varphi(x)$ белгілеуін енгізіп, бұдан

$$y'(x) = a_1 + \int_0^x \varphi(s)ds$$

және

$$y(x) = a_0 + a_1 x + \int_0^x (x-s)\varphi(s)ds$$

теңдіктерін аламыз.Енді осы өрнектерді (2.1) теңдеуіне қоямыз

$$\varphi(x) + \int_0^x p(x)\varphi(s)ds + a_1 p(x) + a_0 q(x) + a_1 x q(x) + q(x)\int_0^x p(x-s)\varphi(s)ds = f(x)$$

яғни өзегі

$$K(x,s) = p(x) + (x-s)q(x),$$

ал бос мүшесі

$$F(x) = f(x) - a_1 p(x) - (a_0 + a_1 x)q(x)$$

Болатын Вольтерраның теңдеуін аламыз:

$$\varphi(x) = \int_0^x K(x,s)\varphi(s)ds = F(x).$$

2-мысал. $y''' + x^2 y'' + 4xy = xe^{-x}, \;\; y(0) = 1, \;\; y'(0) = -1, \;\; y''(0) = 0$ Коши есебіне сәйкес келетін интегралдық теңдеуін табайық.

Ол үшін $y'''(x)=\varphi(x)$ белгілеуін енгізіп $y''(x)=\int\limits_0^x \varphi(s)ds,$ $y'(x)+1=\int\limits_0^x (x-s)\varphi(s)ds,$ $y(x)-1+x=\int\limits_0^x \frac{(x-s)^2}{2}\varphi(s)ds$ теңдіктерін аламыз. Енді бұл өрнектердегі $y(x),$ $y'(x),$ $y''(x)$ функцияларын интегралдармен алмастырсақ

$$\varphi(x)+\int\limits_0^x \left[x^2 2x(x-s)\right]\varphi(s)ds = xe^{-x}+4x(1-x)$$

2-текті Вольтерра теңдеуін аламыз.

2. Дифференциалдық теңдеу үшін берілген кейбір шекаралық есептерді Грин функциясы арқылы интегралдық теңдеуге келтіруге болады.

Бұл мәселені жалпы жағдайда келтірейік.

$$y''(x)+p(x)y'(x)+q(x)y(x)=f(x) \qquad (2.3)$$

теңдеуін

$$y(a)=A,\ \ y(b)=B \qquad (2.4)$$

Шекаралық шарттарымен бірге қарастырайық.

Кәдімгі дифференциалдық теңдеулер курсында (2.3)-(2.4) есебінің шешімі Грин функциясы арқылы

$$y(x)=\int\limits_a^b G(x,s)f(s)ds \qquad (2.5)$$

түрінде жазылады.

Егер (2.3) өрнектегі $f(x)$ функциясы $f(x,\varphi(x))$ белгісіз фунциясына тәуелді күрделі функция болса, онда (2.5) формуладан

$$y(x)=\int\limits_a^b G(x,s)f(s,y(s))ds$$

интеградық теңдеуін аламыз.

1-мысал.

$$y''=\lambda y+x^2, \quad y(0)=y\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$$

Шеттік есебі берілсін. Бұл есепті интегралдық теңдеуге келтірейік.

Шешуі: Алдымен

$$y''=0,\ y(0)=y\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$$

біртекті есеп үшін Грин функциясын анықтайық. $y''(0)=0$ теңдеуінің шекаралық шарттарын қанғанттандыратын $y_1(x)=x$ $\quad y_2(x)=x-\frac{\pi}{2}$ сызықтық тәуелсіз шешімдері болатындықтан Грин функциясы

$$G(x,\xi)=\begin{cases}\dfrac{y_1(x)y_2(\xi)}{\Delta(\xi)}, & 0\le x\le \xi,\\[2ex] \dfrac{1}{\Delta}(\xi)\cdot y_1(x)y_2(\xi), & \xi\le x\le \dfrac{\pi}{2}\end{cases}$$

түрде жазылады, мұндағы

$$\Delta(\xi)=\begin{vmatrix}\xi & \xi-\dfrac{\pi}{2}\\ 1 & 1\end{vmatrix}=\frac{\pi}{2}.$$

Демек,

$$G(x,\xi)=\begin{cases}\left(\dfrac{2}{\pi}\xi-1\right)x, & 0\le x\le \xi,\\ \left(\dfrac{2}{\pi}x-1\right)\xi, & \xi\le x\le \dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$$

Енді осы Грин фукциясын интегралдық теңдеудің өзегі деп қабылдасақ, онда бұл есеп үшін интегралдық теңдеу

$$y(x)=f(x)-\lambda\int_0^{\frac{\pi}{2}}G(x,\xi)y(\xi)d\xi,$$

мұндағы

$$f(x)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}G(x,\xi)\xi^2d\xi=\int_0^x\left(\frac{2x}{\pi}-1\right)\xi^3d\xi+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{2\xi}{\pi}-1\right)x\xi^2d\xi=\frac{x}{12}\left(x^2-\frac{\pi^5}{8}\right).$$

Мысал. Шеттік есеп

$$y''-k^2y=f(x,y),\quad y(0)=y(1)=0,\ \ \mathrm{k}=\mathrm{const}$$

берілсін. Бұл есепті Грин функциясы арқылы интегралдық теңдеуге келтірейік.

Біртекті $y''-k^2y=0$ теңдеуінің екі сызықтық тәуелсіз шешімдері $y_1=e^{kx},\ y_2=e^{-kx}$, ал шекаралық шарттарды қанағаттандыратын сызықтық тәуелсіз шешімдері

$$y_1(x)=e^{kx}-e^{-kx},\qquad y_2(x)=e^{k(x-1)}-e^{-k(x-1)}.$$

Сондықан

$$G(x,\xi)=\begin{cases}G_1(\xi)\left(e^{kx}-e^{-kx}\right), & 0\le x\le\xi,\\ G_2(\xi)\left(e^{k(x-1)}-e^{-k(x-1)}\right), & \xi\le x\le\dfrac{\pi}{2},\end{cases}$$

$G(x,\xi)$ үзіліссіз функция, демек,

$$G_1(\xi)\left(e^{k\xi}-e^{-k\xi}\right)=G_2(\xi)\left(e^{k(\xi-1)}-e^{-k(\xi-1)}\right)$$

туындысы $G'_x(\xi,x)$ функциясының $x=\xi$ нүктесінде үзілісті ($\dfrac{1}{p(\xi)}$ - секірмелі), яғни

$$-C_1\left(ke^{k\xi}+ke^{-k\xi}\right)+C_2k\left(e^{k(\xi-1)}+e^{-k(\xi-1)}\right)=1,$$

олай болса

$$\left.\begin{aligned}&C_2\left(e^{k(\xi-1)}-e^{-k(\xi-1)}\right)-C_1\left(e^{k\xi}-e^{-k\xi}\right)=0,\\ &C_2\left(e^{k(\xi-1)}+e^{-k(\xi-1)}\right)-C_1\left(e^{k\xi}+e^{-k\xi}\right)=\frac{1}{k},\end{aligned}\right\}$$

$$\Delta=2(e^k-e^{-k}),$$

$$C_1(\xi)=\frac{1}{k\Delta}\left(e^{k(\xi-1)}-e^{-k(\xi-1)}\right),\ \ C_2(\xi)=\frac{1}{k\Delta}\left(e^{k\xi}-e^{-k\xi}\right)$$

Демек, Грин функциясы

$$G(x,\xi)=\frac{1}{2k(e^x-e^{-x})}\begin{cases}\left(e^{kx}-e^{-kx}\right)\left(e^{k(x-1)}-e^{-k(x-1)}\right), & 0\le x\le\xi\\ \left(e^{k\xi}-e^{-k\xi}\right)\left(e^{k(x-1)}-e^{-k(x-1)}\right), & \xi\le x\le 1.\end{cases}$$

Олай болса, берілген есепті

$$y(x)=\int_0^1G(x,\xi)f(\xi,y(\xi))d\xi$$

интегралдық теңдеуге келтірдік.

3. Көп жағдайда Вольтерраның 2-текті интегралдық теңдеулерін жай дифференциалдық теңдеу үшін Коши есебіне келтіруге болады.

Мысал.

$$\varphi(x) = \sin x + \int_0^x \sin(x-s)\varphi(s)ds \qquad (2.6)$$

теңдеуін шешу керек.

Бұл теңдеуді біртіндеп дифференциалдық

$$\varphi'(x) = cosx + \int_0^x \cos(x-s)\varphi(s)ds, \qquad (2.7)$$

$$\varphi''(x) = -\sin x + \varphi(x) - \int_0^x \sin(x-s)\varphi(s)ds. \qquad (2.8)$$

(2.6) пен (2.8) теңдеулерінен $\int_0^x \sin(x-s)\varphi(s)ds$ интегралын жойсақ, $\varphi(x)$ функциясы үшін $\varphi''(x) = 0$ теңдеуін аламыз. Ал (2.6), (2.7) теңдеулерінен $\varphi(0) = 0,\ \ \varphi'(0) = 1$ бастапқы шарттарды анықтаймыз, яғни

$$\varphi''(0) = 0,\ \ \varphi(0) = 0,\ \ \varphi'(0) = 1.$$

Біз Коши есебіне келдік. Ал бұл есептің шешімі $\varphi(x) = x.$

§3. ВОЛЬТЕРРАНЫҢ 2-ТЕКТІ ИНТЕГРАЛДЫҚ ТЕҢДЕУЛЕРІН ТІЗБЕКТЕЙ ЖУЫҚТАП ШЕШУІ ӘДІСІ

Вольтерраның 2-текті интегралдық теңдеуін қарастырайық

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda\int_0^x K(x,s)\varphi(s)ds. \qquad (3.1)$$

Мұнда оның $K(x,s)$ өзегі мен $f(x)$ берілген және олар $\{a \le x \le b,\ \mathrm{a} \le s \le x\} \equiv D$ төртбұрышында үзіліссіз, ал λ -парметр. $[a,b]$ кесіндісінде кез келген $\varphi_0(x)$ функциясын алып, оны (3.1) теңдеуінің нөлінші жуық шешімі делік. Бұл функцияны (3.1) теңдеуінің оң жағындағы $\varphi(x)$ функциясының орнына қойып

$$\varphi_1(x) = f(x) + \lambda\int_a^x K(x,s)\varphi_0(s)ds.$$

Интегралдық теңдеуінің бірінші жуық шешімін аламыз. Осы процесті ары қарай жалғастыру нәтижесінде

$$\varphi_0(x), \varphi_1(x), \varphi_2(x), ..., \varphi_n(x), ... \qquad (3.2)$$

жуық шешімдер тізбегін аламыз, мұндағы $n-$жуық шешім үшін

$$\varphi_n(x) = f(x) + \lambda\int_a^x K(x,s)\varphi_{n-1}(s)ds. \qquad (3.3)$$

Егер $f(x) \in C[a,b],\ \ \mathrm{K(x,s)} \in \mathrm{C(D)}$ болса, онда $\{\varphi_n(x)\}$ жуық шешімдер тізбегі $n \to \infty$ жағдайда (3.1) теңдеуінің шешімі $\varphi(x)$ функцияға жинақты екені интегралдық теңдеулердің жалпы теориясынан белгілі /3;4/.

$\varphi_0(x)$ функциясын ыңғайлы етіп алу $\{\varphi_n(x)\}$ тізбектің интегралдық теңдеу шешіміне жинақтылығын шапшаңдатады.

Мысал,

$$\varphi(x) = x^2 + 2 - \int_a^x (x-s)\varphi(s)ds.$$

Теңдеуіндегі $\varphi_0(x)=1$ деп алып, тізбектей жуықтап әдісін қолдансақ

$$\varphi_1(x)=x^2+2-\int_a^x(x-s)\cdot 1\cdot ds=2-\frac{x^2}{2!},$$

$$\varphi_2(x)=x^2+2-\int_a^x(x-s)\left(2-\frac{s^2}{2!}\right)ds=2-\frac{x^4}{4!},$$

....

$$\varphi_n(x)=2-\frac{x^{2n}}{2n!},\ldots\ .$$

Жауабы. $\varphi(x)=2,$ себебі $\lim\limits_{n\to\infty}\left(2-\dfrac{x^n}{n!}\right)=2.$

§4. ИНТЕГРАЛДЫҚ ТЕҢДЕУДІҢ РЕЗОЛЬВЕНТАСЫ

Көп жағдайда мынадай интегралдық теңдеу

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\int_a^x K(x,s)\varphi(s)ds. \tag{4.1}$$

λ сан параметрінің әр түрлі мәндері үшін теңдеулер жиынтығын түзеді. Айталық, (4.1) теңдеудегі λ параметрін тұрақты және нөлінші жуық шешімі $\varphi_0(x)=f(x)$ деп алып теңдеуді тізбектей жуықтап шешу әдісімен шешейік. Онда

$$\varphi_1(x)=f(x)+\lambda\int_a^x K(x,s)f(s)ds=f(x)+\lambda\int_a^x K_1(x,s)f(s)ds,$$

мұнда $K_1(x,s)=K(x,s),$

$$\varphi_2(x)=f(x)+\lambda\int_a^x K(x,s)f(s)ds+\lambda^2\int_a^x K(x,s)\left(\int_a^t K_1(t,s)f(s)ds\right)dt=$$

$$=f(x)+\lambda\int_a^x K_1(x,s)f(s)ds+\lambda^2\int_a^x\left(\int_a^t K(x,t)K(t,s)f(s)ds\right)dt=f(x)+$$

$$+\lambda\int_a^x K_1(x,s)f(s)ds+\lambda^2\int_a^x K_2(x,s)f(s)ds.$$

$$K_2(x,s)=\int_a^x K(x,t)K_1(t,s)dt,\ldots\ .$$

Жалпы жағдайда

$$\varphi_n(x)=f(x)+\sum_{j=1}^n\lambda^j\int_a^x K_j(x,s)f(s)ds, \tag{4.2}$$

мұндағы

$$K_j(x,s)=\int_a^x K(x,t)K_{j-1}(t,s)dt,\ \ \mathrm{j}=1,2,\ldots. \tag{4.3}$$

Егер $K(x,s)$ өзегі үзіліссіз функция болса, онда

$$R(x,s;\lambda)=\sum_{j=1}^n\lambda^{j-1}K_j(x,s) \tag{4.4}$$

қатары λ параметрінің кез келген тұрақты мәні үшін $R(x,s;\lambda)$ функциясына жинақталады ($x\in[a,b]$ және $x\in[a,x]$-қа салыстырғанда бірқалыпты). Сонымен (4.3) қатары $n\to\infty$ жағдайда

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda\int_a^x R(x,s;\lambda)f(s)ds \qquad (4.5)$$

өрнегіне айналады, ал бұл жоғарыдағы (4.1) интегралдық теңдеуінің шешімі болады.

Мысалы, $K(x,s)=x$ өзегінің $R(x,s,\lambda)$ резольвентасын түзіп, мына

$$\varphi(x) = x - \frac{1}{2}\int_a^x \varphi f(s)ds$$

интегралдық теңдеуін шешейік.

Жоғарыдағы (4.3) рекурент өрнегінен

$$K_1(x,s) = x,$$

$$K_2(x,s) = \int_s^x K(x,t)K_1(t,s)ds = \int_s^x xtdt = x\cdot\frac{x^2-s^2}{2},$$

$$K_3(x,s) = \int_s^x xt\cdot\frac{t^2\mp s^2}{2}dt = x\cdot\frac{1}{2!}\left(\frac{x^2-s^2}{2}\right)^2,$$

....

$$K_j(x,s) = \frac{1}{(j-1)!}\left(\frac{x^2-s^2}{2}\right)^{j-1}, \quad \mathrm{j}=1,2,\ldots.$$

Бұл өзектерді (4.4) қатарына қойсақ

$$R(x,s;\lambda) = x\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{(j-1)!}\left(\frac{x^2-s^2}{2}\right)^{j-1} = xe^{\lambda\frac{x^2-s^2}{2}}.$$

Демек, берілген интегралдық теңдеудің шешімін (4.5) формула бойынша тапсақ, онда

$$\varphi(x) = x - \frac{1}{2}\int_0^x xe^{-\frac{1}{4}(x^2-s^2)}sds.$$

§5. ҮЙІРТКІ ТИПІНДЕГІ ВОЛЬТЕРРАНЫҢ 2-ТЕКТІ ИНТЕГРАЛДЫҚ ТЕҢДЕУІ ЖӘНЕ ОНЫ ЛАПЛАСТЫҢ ИНТЕГРАЛДЫҚ ТҮРЛЕНДІРУ ӘДІСІМЕН ШЕШУ

Мына

$$\varphi(x) = f(x) + \int_a^x K(x,s)\varphi(s)ds$$

Вольтерраның 2-текті интегралдық теңдеуінің өзегі $K(x,s)=K(x-s)$ түрінде, яғни аргументтерінің айырымымен берілген болса, онда мұндай теңдеуді көбейту типіндегі теңдеу деп атайды.

Егер (5.1) теңдеудегі a саны шектелген болса, оны ыңғайлы болу үшін $a=0$ деп алуға болады. Бұл (5.1) теңдеуді шешу үшін Лапластың интегралдық түрлендіруін пайдаланамыз.

Айталық, $f(x)$ пен $K(u)$ функциялары интегралдық түрлендірудің түпнұсқасы болсын. Бұл жағдайда (5.1) теңдеудегі $\varphi(x)$ функциясы да түпнұсқа болады. Ендеше (5.1) интегралдық теңдеуінің екі жағына да Лаплас түрлендіруін қолдансақ

$$Y(p) = F(p) + \tilde{K}(p)Y(p)$$

өрнегін аламыз. Бұдан

$$Y(p) = \frac{F(p)}{1-\tilde{K}(p)}. \qquad (5.2)$$

Соңғы (5.2) өрнегінен Лапластың кері түрлендіру әдісін пайдаланып, (5,1) теңдеуінің шешімін табамыз.

Мысал. Мына

$$\varphi(x) = 1 + \int_0^x ch(x-s)\varphi(s)ds$$

Вольтерраның 2-текті интегралдық теңдеуін Лапластың интегралдық түрлендіру әдісімен шешелік.

$1 = p$, $\mathrm{chz} = \frac{\mathrm{p}}{\mathrm{p}-1}$ болғандықтан, берілген интегралдық теңдеуге Лапластық түрлендіру мен көбейту теоремасын қолдансақ

$$\tilde{\varphi}(p) = \frac{1}{p} + \frac{\mathrm{p}}{\mathrm{p}^2-1}\tilde{\varphi}(p)$$

немесе

$$\tilde{\varphi}(p)\cdot\left(\frac{1}{p} - \frac{\mathrm{p}}{\mathrm{p}^2-1}\right) = \frac{1}{p},$$

яғни

$$\tilde{\varphi}(p) = \frac{1}{p} + \frac{1}{\left(p-\frac{1}{\mathrm{p}}\right)^2 - \frac{5}{4}},$$

Бұл өрнектен Лапластың кері түрлендіруі бойынша

$$\varphi(x) = 1 + \frac{2}{\sqrt{s}}e^{\frac{x^2}{2}}sh\frac{\sqrt{5}}{2}x.$$

Кейбір жағдай Вольтерраның 2-текті үйірткі типіндегі интегралдық теңдеулерін алдымен теңдеудің резольвентасын табу үшін Лаплас түрлендіруін қолданады, яғни интегралдық теңдеудің өзегі $K(x,s) = K(x-s)$ болғандықтан, (5.1) теңдеудің $/a = 0$ үшін/

$$\varphi(x) = f(x) + \int_a^x K(x,s)\varphi(s)ds \qquad (5.1)$$

шешімін

$$\varphi(x) = f(x) + \int_a^x R(x-s)f(s)ds \qquad (5.3)$$

түрінде жазуға болады, мұндағы $R(x-s) = R(x,s;\lambda)$, ал $R(x,s;l)$ болса, $K(x,s) = K(x-s)$ өзектің резольвентасы болады (5.1) және (5.3) теңдеулердің екі жағына да Лаплас түрлендіруін қолдансақ, онда

$$\tilde{\varphi}(p) = \tilde{F}(p) + \tilde{K}(p)\tilde{\varphi}(p), \quad \tilde{\varphi}(p) = \tilde{F}(p) + \tilde{R}(p)\tilde{F}(p)$$

өрнектерін аламыз. Бұдан

$$\tilde{F}(p) = \frac{\tilde{K}(p)}{1-\tilde{K}(p)}. \qquad (5.4)$$

Бұл теңдеуге Лапластың кері түрлендіруін қолданып $R(x-s)$ резольвентаны анықтаймыз, яғни (5.1) теңдеуінің шешімі (5.3) түрінде табамыз.

§6.ВОЛЬТЕРРАНЫҢ 1-ТЕКТІ ИНТЕГРАЛДЫҚ ТЕҢДЕУЛЕРІ ЖӘНЕ ОЛАРДЫ ШЕШУ

Біз жоғарыда

$$\int_0^x K(x,s)\varphi(s)ds = f(x) \tag{6.1}$$

өрнегі Вольтерраның 1-текті интегралдық теңдеуі екенін келтіргенбіз. Мұндағы $\varphi(x)-$ белгісіз функция, ал $K(x,s)$ пен $f(x)-$ белгілі функциялар.

Егер (6.1) теңдеудегі ал $K(x,s)$ пен $f(x)$ бос мүшесінің ал $K'_x(x,s)$, $f'(x)$ туындылары $[a,b]$ кесіндісінде үзіліссіз және сол кесіндіде $K(x,x)\neq 0$ болса, онда (6.1) теңдеуін x айнымалысы бойынша дифференциалдап, Вольтерраның 2-текті интегралдық теңдеуіне келтіруге болады, яғни

$$K(x,x)\varphi(x)+\int_a^x \frac{\partial K(x,s)}{\partial x}\varphi(s)ds = f'(x).$$

Бұдан

$$\varphi(x)=\frac{f'(x)}{K(x,x)}+\int_a^x \frac{1}{K(x,x)}\cdot\frac{\partial K(x,s)}{\partial x}\varphi(s)ds$$

Вольтерраның 2-текті интегралдық теңдеуі алынды. Мұндай теңдеулерді жоғарыда келтірілген әдістермен шеше аламыз. Енді осыған нақты мысалдар келтірейік.

1-мысал. Мына

$$\int_a^x \left(2+x^2-s^2\right)\varphi(s)ds = x^2$$

Вольтерраның 1-текті интегралдық теңдеуін шешейік.

Бұл теңдеуді x айнымалысы бойынша дифференциалдасақ

$$2\varphi(x)+\int_a^x 2x\varphi(s)ds = 2x$$

немесе

$$\varphi(x)=x-\int_a^x 2x\varphi(s)ds.$$

Біз 2-текті интегралдық теңдеуін алдық. Мұндағы $u(x)=\int_a^x \varphi(s)ds.$ десек, онда

$$\varphi(x)=x-xu(x), u'(\mathrm{x})=\varphi(\mathrm{x})\Rightarrow u'(\mathrm{x})=x(1-u(x))$$

немесе

$$u'(\mathrm{x})+u(\mathrm{x})\cdot \mathrm{x}=x,\ u(0)=0.$$

Соңғы есептің шешімі

$$u(\mathrm{x})=1-e^{-\frac{x^2}{2}},$$

демек

$$\varphi(\mathrm{x})=xe^{-\frac{x^2}{2}}.$$

2-мысал. Мына

$$\int_0^x e^{x-s}\varphi(s)ds = x$$

үйірткі түріндегі Вольтерраның 1-текті интегралдық теңдеуін шешу үшін Лапластын түрлендіруін қолданамыз

$$\frac{1}{p-1}\tilde{\varphi}(p) = \frac{1}{p^2} \Rightarrow \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} \div 1 - x.$$

Демек теңдеудің шешімі

$$\varphi(s) = 1 - x.$$

Ескерту. Егер Вольтерраның 1-текті интегралдық теңдеуіндегі өзегі $K(x,x)=0$ болса,онда соңғы өзекті тағы да дифференциалдап нәтижесінде жаңадан пайда болған теңдеудің өзегі $s=x$ мәнінде нөл болмаса, онда біз 2-текті интегралдық теңдеуге келеміз. Кейбір жағдайда осы процесті қайталау керек.

Абельдің интегралдық теңдеуі

$$\int_0^x \frac{\varphi(t)}{\sqrt{x-t}}dt = f(x),$$

ал Абельдің жалпылама теңдеуі

$$\int_0^x \frac{\varphi(t)}{(x-t)^{\alpha}}dt = f(x), \;\; 0<\alpha<1.$$

Ескерту. Абель теңдеуін 2-типке келтіруге болмайды.

Абель теңдеуін шешу үшін мынадай әдіс қолданылады. Абель теңдеуінің екі жағын $\dfrac{1}{(x-s)^{1-\alpha}}$ – ге көбейтіп, s айнымалы бойынша 0 -ден x – ке дейін интегралдасақ:

$$\int_0^x \frac{ds}{(x-s)^{1-\alpha}}\int_0^s \frac{\varphi(t)}{(s-t)^{\alpha}}dt = \int_0^x \frac{f(s)}{(x-s)^{1-\alpha}}ds$$

немесе

$$\int_0^x \varphi(t)\left(\int_t^x \frac{ds}{(x-s)^{1-\alpha}(s-t)^{\alpha}}\right)dt = \int_0^x \frac{f(s)}{(x-s)^{1-\alpha}}ds.$$

Бұдан енді мына теңдікті пайдалансақ

$$\int_t^x \frac{ds}{(x-s)^{1-\alpha}(s-t)^{\alpha}} = \frac{\pi}{\sin\alpha\pi},$$

онда

$$\int_0^x \varphi(t)dt = \frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{f(s)}{(x-s)^{1-\alpha}(x-s)^{1-\alpha}}ds.$$

Енді x бойынша дифференциалдаймыз, сонда

$$\varphi(t) = \frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\frac{d}{dx}\int_0^x \frac{f(s)}{(x-s)^{1-\alpha}}ds = \frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\left[\frac{f(0)}{x^{1-\alpha}} + \int_0^x \frac{f'(x)}{(x-s)^{1-\alpha}}ds\right].$$

Мысалы, мынадай түрдегі теңдеулер

$$\int_0^x (x-t)^{\beta}\varphi(t)dt = f(x), \quad \beta > -1 \qquad (*)$$

Абель теңдеуіне келеді. Егер мұндағы $\beta>0$ болса, онда теңдеудің екі жағын да дифференциалдап. Абель теңдеуін алуға болады.

$$\beta\int_0^x (x-t)^{\beta-1}\varphi(t)dt = f'(x),$$

$$\beta(\beta-1)\int_0^x (x-t)^{\beta-2}\varphi(t)dt = f''(x),\ldots \quad .$$

1-мысал.

$$\int_0^x (x-t)^{2,5}\varphi(t)dt = x^{3,7},$$

Теңдеуін үш рет дифференциалдасақ

$$(2,5)\int_0^x (x-t)^{1,5}\varphi(t)dt = 3,7x^{2,7},$$

$$(2,5)(1,5)\int_0^x (x-t)^{0,5}\varphi(t)dt = (3,7)(2,7)x^{1,7},$$

$$(2,5)(1,5)(0,5)\int_0^x (x-t)^{-0,5}\varphi(t)dt = (3,7)(2,7)(1,7)x^{0,7}$$

нәтижесінде Абель теңдеуіне келеміз.

Ескерту. (*) теңдеуге жоғарыдағы әдісті қолдануға болады.
Ол үшін оған $(x-s)^{\mu}$ $(\mu > -1)$-ді көбейту керек.

Мына

$$\int_0^x (x-s)^{\mu}(s-t)^{\beta}ds = \frac{\Gamma(\beta+1)\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\beta+\mu+2)}\cdot(x-t)^{\beta+\mu+1}$$

теңдікті және μ санын $\beta+\mu+1 = n > 0$ натурал санына тең болатындай таңдайды.

§7. ШЕКАРАСЫ $(x,+\infty)$ БОЛҒАН ВОЛЬТЕРРАНЫҢ ИНТЕГРАЛДЫҚ ТЕҢДЕУЛЕРІ

Мына

$$\varphi(x) = f(x) + \int_x^{\infty} K(x-t)\varphi(t)dt \qquad (7.1)$$

Вольтерраның интегралдық теңдеуін Лаплас түрлендіруімен шешуге болады.

Лапласт түрлендіруінің қасиеті бойынша

$$\int_x^{\infty} K(x-t)\varphi(t)dt \div \tilde{K}(-p)\tilde{\varphi}(p) \qquad (7.2)$$

орынды, мұндағы

$$\tilde{K}(-p) = \int_0^{\infty} K(-x)e^{px}dx, \qquad \tilde{\varphi}(p) = \varphi(t).$$

Интегралдық (7.1) теңдеуге Лаплас түрлендіруін қолданып

$$\tilde{\varphi}(p) = \tilde{F}(p) + \tilde{K}(-p)\tilde{\varphi}(p)$$

өрнегін аламыз, бұдан

$$\tilde{\varphi}(p) = \frac{\tilde{F}(p)}{1-\tilde{K}(-p)}, \quad (\tilde{K}(-p) \neq 1).$$

Егер $\tilde{K}(-p)$, $\tilde{f}(p)$ функциялардың аналитикалық функциясы болатын аймақтары бір-бірімен қиылысып жататын болса, онда берілген теңдеудің жеке шешімі үшін

$$\varphi(p)=\frac{1}{2\pi i}\int_{A-i\infty}^{A+i\infty}\frac{\widetilde{F}(p)}{1-\widetilde{K}(-p)}e^{px}dp. \qquad (7.3)$$

Мысалы,

$$\varphi(p)=x+\int_{x}^{\infty}e^{2x-t}\varphi(t)dt.$$

Интегралдық теңдеуіне Лаплас түрлендіруін пайдалансақ

$$\widetilde{\varphi}(p)=\frac{1}{p^2}-\frac{1}{2-p}\widetilde{\varphi}(p)\Rightarrow\widetilde{\varphi}(p)=\frac{p-2}{p^2(p-1)}=\frac{1}{p^2},$$

демек,

$$\varphi(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{A-i\infty}^{A+i\infty}\frac{e^{px}}{p^2}\cdot\frac{p-2}{p-1}dp \quad (0<A<2)$$

Мұны шегерінді әдісімен шешіп ($p=0,\ p=1$- еркше нүктелер), нәтижесінде теңдеудің шешімі

$$\varphi(x)=2x+1+Ce^{x}, \quad C=const.$$

II.ТАРАУ
ФРЕДГОЛЬМНІҢ ИНТЕГРАЛДЫҚ ТЕҢДЕУЛЕРІ

§1. ФРЕДГОЛЬМНІҢ 2-ТЕКТІ ИНТЕГРАЛДЫҚ ТЕҢДЕУІН БІРТІНДЕП ЖУЫҚТАП ШЕШУ

Мына

$$\varphi(x)-\int_{a}^{b}K(x,s)\varphi(s)ds=f(x) \qquad (1.1)$$

Фредгольмнің 2-текті интегралдық теңдеуін қарастырайық, мұндағы $K(x,s)$ өзегі мен $f(x)$ бос мүшесі $[a,b]$ кесіндіде берілген функциялар.

Егер $a\le x\le s$ болғанда, $K(x,s)=0$ болса, онда (1.1) теңдеу Вольтерраның 2-текті интегралдық теңдеуіне айналады. (1.1) теңдеуіндегі $K(x,s)$, $f(x)$ функциялар

$$\int_{a}^{b}\int_{a}^{b}|K(x,s)|^2dxds\equiv B^2<+\infty, \qquad (1.2)$$

$$\int_{a}^{b}|f(x)|^2dx<+\infty, \qquad (1.3)$$

Теңсіздіктерін, яғни $K(x,s)$, $f(x)\in L_2[a,b]$ шарттарын қанғаттандырсын.

Әдетте (1.1) теңдеудің бір өзі емес

$$\varphi(x)-\lambda\int_{a}^{b}K(x,s)\varphi(s)ds=f(x) \qquad (1.4)$$

түріндегі λ параметріне тәуелді теңдеулер жиыны қарастырылады. Бұл теңдеудің

$$|\lambda|<\frac{1}{B} \qquad (1.5)$$

шартын қанағаттандырғанда ғана жалғыз шешімі болады. Ол шешімді біртіндеп әдісімен табады. Ол үшін (1.4) теңдеуін

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda\int_a^b K(x,s)\varphi(s)ds$$

түрінде жазып, одан кейін нөлдік жуық шешімі үшін $\varphi_0(x)$ функциясын қалағанымызша таңдап алып, жуық шешімдерінің $\varphi_n(x)$, $n = 0,1,2,...$ тізбегін құрамыз, мұнда

$$\varphi_n(x) = f(x) + \lambda\int_a^b K(x,s)\varphi_{n-1}(s)ds, \quad \text{n} \in \text{N}.$$

Егер мұндағы λ параметрі (1.5) шартын қанағаттандырса, онда $\{\varphi_n(x)\}$ жуықтау тізбегі $n \to \infty$ жағдайда $\varphi(x)$ шешімге жинақты болады.

Мысал.

$$\varphi_n(x) = -\frac{1}{2}\int_0^1 \varphi(s)ds = \sin \pi x$$

теңдеуін біртіндеп жуықтау әдісімен шешейік.

Шешуі. Берілген теңдеуді (1.4) теңдеуімен салыстырсақ $\lambda = \frac{1}{2}$, $\quad K(x,s) = 1;\ f(x) = \sin \pi x$

немесе

$$B^2 = \int_0^1\int_0^1 |K(x,s)|^2 dxds = 1,$$

олай болса

$$\lambda = \frac{1}{2} < 1,\ \int_0^1 \sin^2 \pi x ds < +\infty.$$

Енді $\varphi_0(x) = \sin \pi x$ нөлдік жуық шешімі десек

$$\varphi_1(x) = \sin \pi x + \frac{1}{2}\int_0^1 \sin \pi s = \sin \pi x + \frac{1}{\pi},$$

$$\varphi_2(x) = \sin \pi x + \frac{1}{2}\int_0^1 (\sin \pi s + \frac{1}{\pi})ds = \sin \pi x + \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2\pi},$$

$$\varphi_3(x) = \sin \pi x + \frac{1}{2}(s)ds = \sin \pi x + \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{4\pi},$$

....

$$\varphi_n(x) = \sin \pi x + \frac{1}{2}\int_0^1 \varphi_{n-1}(s)ds = \sin \pi x + \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2^k}.$$

Бұдан $\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_n(x) = \sin \pi x + \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2^k} = \sin \pi x + \frac{2}{\pi}.$

$$\varphi(x) = \sin \pi x + \frac{2}{\pi}.$$

§3. ИНТЕГРАЛДЫҚ ТЕҢДЕУЛЕРДІҢ МЕНШІКТІ САНДАРЫ МЕН МЕШІКТІ ФУНКЦИЯЛАРЫ

Анықтама. Мына

$$\varphi(x)-\lambda\int_a^b K(x,s)\varphi(s)ds=0 \qquad (3.1)$$

біртекті интегралдық теңдеудің нөлге тең емес шешіміне сәйкес келетін λ параметрінің (3.1) теңдеудің сипаттаушы саны, ал теңдеудің нөлге тең емес шешімін меншкіті функция деп атайды. $\lambda=0$ болса, онда ол бұл теңдеудің тек қана нөлдік шешімі болады. Егер λ сипаттаушы саны болса, онда $\mu=\frac{1}{\lambda}$ интегралдық теңдеудің меншікті саны деп аталады. §2-та берілген теңдеуге сәйкес келетін өзегі қарапайым біртекті интегралдық

$$\varphi(x)-\lambda\int_a^b\left(\sum_{j=1}^n P_j(x)q_j(s)\right)\varphi(s)ds=0$$

теңдеудің шешімі

$$\varphi(x)=\lambda\sum_{j=1}^n Z_jP_j(x)$$

функциясы түрінде жазылады, мұндағы

$$\vec{S}=(Z_1,Z_2,...,Z_n)^T \qquad (E-\lambda A)\vec{S}=0$$

теңдеудің шешімі болады, ал $A=\left(a_{ij}\right)_{i,j=1}^n$,

$$a_{ij}=\int_a^b q_i(x)P_j(x)dx, \quad i,j=1,2,...,n.$$

1-мысал.

$$\varphi(x)-\lambda\int_0^1(xs-2x^2)\varphi(s)ds=0$$

теңдеудің сипаттаушы саны мен меншікті функциясын анықтайық. $K(x,s)=xs-2x^2$ - қарапайым өзек. Ал
$P_1(x)=x,\ \ P_1(x)=-2x^2,\ \ q_1(s)=s,\ \ q_2(s)=1$ деп алып, A матрицасының элементтерін

$$a_{11}=\int_0^1 x^2dx=\frac{1}{3},\ \ a_{12}=-2\int_0^1 x^3dx=-\frac{1}{2},$$

$$a_{21}=\int_0^1 xdx=\frac{1}{2},\ \ a_{22}=-2\int_0^1 x^2dx=-\frac{2}{3}$$

анықтаймыз. Олай болса

$$\det(A-\mu E)=\begin{vmatrix}\frac{1}{3}-\mu & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & -\frac{2}{3}-\mu\end{vmatrix}=\left(\mu+\frac{1}{6}\right)^2=0.$$

Мұндағы $\mu=-\frac{1}{6}$ - бір ғана A матрицасының меншікті саны. Бұған сәйкес келетін меншікті векторларды

$$\left(A+\frac{1}{6}E\right)\vec{S}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}Z_1\\ Z_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$$

теңдеу жүйесінен анықтаймыз: $Z_1=C,\ \ Z_2=C.$

Олай болса $\lambda=\frac{1}{\mu}=-6,$ ал оған сәйкес келетін меншікті функция

$$\varphi(x) = -6(Z_1 x - 2Z_2 x^2) = C(x - 2x^2),$$

мұндағы C - кез келген тұрақты шама.

Ескерту. Кейбір жағдайларда (егер интегралдық теңдеу Вольтерра түріндегі немесе өзегі қарапайым интегралдық теңдеу, яғни (2.8) теңдеуіндегі A матрицасы нөлдік матрица болса) интегралдық теңдеудің сипаттаушы саны болмайды.

2-мысал. Мына

$$\varphi(x) - \lambda \int_{-\pi}^{\pi} x \cos s \varphi(s) ds = 0$$

Интегралдық теңдеулердің сипаттаушы саны мен меншікті функциясын табайық.

$$\varphi(x) - \lambda x z = 0, \quad z = \int_{-\pi}^{\pi} \cos s \varphi(s) ds,$$

$$\text{бұдан} \quad \varphi(x) - \lambda z \int_{-\pi}^{\pi} x \cos x dx = 0.$$

Мұнда $\int_{-\pi}^{\pi} x \cos x dx = 0$ болғандықтан, λ санының кез келген мәні үшін бұл теңдеудің жалғыз ғана $z = 0$ шешімі болады. Демек, кез келген λ үшін берілген интегралдық теңдеудің тек нөлдік шешімі болады, яғни сипаттаушы саны болмайды.

§6. ФРЕДГОЛЬМНІҢ АНЫҚТАУЫШТАР ӘДІСІ

Егерде 2-текті Фредгольмнің интегралдық теңдеуі

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b K(x,s) \varphi(s) ds + f(x) \tag{6.1}$$

берілсе, онда оның шешімі

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b R(x,s;\lambda) f(s) ds \tag{6.2}$$

өрнегімен анықталады, мұндағы $R(x,s;\lambda)$-интегралдық теңдеудің $K(x,s)$ өзегінің резольвентасы.

Ал резольвента мероморфты функция болғандықтан, оны барлық жағдайда λ айнымалыға қатысты бүтін функциялардың қатынасына тең деп қарастыруға болады. Бұл жағдайда резольвента полюстері теңдеудің өзегінің меншікті сандары x, s айнымалыларына тәуелсіз, сондықтан бұл бөлшектің бөлімі тек қана λ-ға тәуелді болады. Сонымен

$$R(x,s'\lambda) = \frac{D(x,s;\lambda)}{D(\lambda)}, \tag{6.3}$$

мұндағы $D(x,s;\lambda),\ D(\lambda)$ жоғарыда ескертілгендей λ-ға қатысты бүтін функциялар және $D(\lambda) \neq 0,$ ал олар

$$D(x,s'\lambda) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} B_n(x,s) \lambda^n, \tag{6.4}$$

$$D(\lambda) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} C_n \lambda^n. \tag{6.5}$$

Бұл екі өрнектегі

$$B_0(x,s) = K(x,s), \tag{6.6}$$

$$B_n(x,s)=\underbrace{\int_a^b\dots\int_a^b}_{n}\begin{vmatrix}K(x,s)K(x,s_1)\dots K(x,s_n)\\ K(s_1,s)K(s_1,s_1)\dots K(s_1,s_n)\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ K(s_n,s)K(s_n,s_1)\dots K(s_n,s_n)\end{vmatrix}ds_1ds_2\dots ds_n,\ n=1,2,\dots$$

$$C_n=\underbrace{\int_a^b\dots\int_a^b}_{n}\begin{vmatrix}K(s_1,s_1)K(s_1,s_2)\dots K(s_1,s_n)\\ K(s_2,s)K(s_2,s_2)\dots K(s_2,s_n)\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ K(s_n,s_1)K(s_n,s_2)\dots K(s_n,s_n)\end{vmatrix}ds_1ds_2\dots ds_n,\ n=1,2,\dots$$

Ал мұндағы $D(x,s;\lambda)-$Фредгольм миноры, $D(\lambda)-$ Фредгольм анықтауышы деп аталады.

Егер $\int_a^b\int_a^b K^2(x,s)dsdx<+\infty$ болса, онда (6.4), (6.5) қатарлары $\lambda-$ның барлық мәндерінде жинақты болады.

1-мысал. Өзегі $K(x,s)=xe^{-s}$ интегралдау шекаралары $a=0, \mathrm{b}=1$болатын интегралдық теңдеудің резольвентасын табу керек.

Шешуі.

$$B_0(x,s)=K(x,s)=xe^{-s},$$

$$B_1(x,s)=\int_0^1\begin{vmatrix}xe^{-s} & xe^{-s_1}\\ s_1e^{-s} & s_1e^{-s_1}\end{vmatrix}ds_1=0,$$

$$B_2(x,s)=\int_0^1\int_0^1\begin{vmatrix}xe^{-s} & xe^{-s_1} & xe^{-s_2}\\ s_1e^{-s} & s_1e^{-s_1} & s_1e^{-s_2}\\ s_2e^{-s} & s_2e^{-s_1} & s_2e^{-s_2}\end{vmatrix}ds_1ds_2=0,$$

$$B_3(x,s)=0,\dots,B_n(x,s)=0,$$

$$C_1=\int_0^1 K(s_1,s_1)ds_1=\int_0^1 s_1e^{-s_1}ds_1=1-\frac{2}{e},$$

$$C_1=\int_0^1\int_0^1\begin{vmatrix}s_1e^{-s_1} & s_1e^{-s_2}\\ s_2e^{-s_1} & s_2e^{-s_2}\end{vmatrix}ds_1ds_2=0,$$

$$C_3=0,\dots,C_n=0.$$

Демек, $D(x,s;\lambda)=xe^{-s}$.

$$D(x)=1-(1-2e^{-1})\lambda$$

олай болса $R(x,s;\lambda)=\dfrac{xe^{-s}}{(1-2e^{-1})\lambda}$.

Егер $K(x,s)=xe^{-s}$ болатын

$$\varphi(x)=2\int_0^1 xe^{-s}\varphi(s)ds+e^x,\ \ \lambda=2$$

Фредгольмнің 2-текті интегралын анықтауыш әдісімен шешу керек болса, онда жоғарыдағы резольвентаны пайдаланып теңдеудің шешімін анықтаймыз

$$\varphi(x)=e^x+2\int_0^1\frac{xe^{-s}}{1-(1-2e^{-1})2}e^s ds=e^x+\frac{2x}{1-(1-2e^{-1})}.$$

1-ескерту. Жоғарыдағы (6.6) бірнеше рет интегралдау қажет болатындықтан пайдалану қолайсыздық тудырады, сондықтан оның орнына

$$B_n(x,s)=C_nK(x,s)-n\int_a^b K(x,s_1)B_{n-1}(s_1,s)ds_1,$$

мұндағы

$$B_0(x,s)=K(x,s),\ \ \mathrm{C}_0=1,$$

$$C_n=\int_a^b B_{n-1}(x,x)dx,\ \ \mathrm{n}>0$$

өрнегін пайдаланса әлдеқайдп қолайлы болар еді және

$$\frac{D'(\lambda)}{D(\lambda)}=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\lambda^n,\ \ A_n=\int_a^b K(x,x)dx,\ \ n=1,2,...$$

өрнектерін де тиісті жерлеріне пайдаланған кейбір жағдайда тиімді.

2-ескерту. Кейбір жағдайда өзектері $K(x,s)=f_1(x)\cdot f_2(s)$ және $\int f_1(x)\cdot f_2(x)dx=A$

болатын

$$\mathrm{D}(\lambda)=1\text{-}\lambda\mathrm{A},\ \ D(x,s;\lambda)=f_1(x)\cdot f_2(s)$$

Интегралдық теңдеудің шешімі

$$\varphi(x)=f(x)+\frac{\lambda f_1(x)}{1-\lambda A}\int_a^b f_1(s)f_2(s)ds$$

болады.

III ТАРАУ
ИНТЕГРАЛДЫҚ ТЕҢДЕУЛЕРДІ ЖУЫҚТАУ ӘДІСІМЕН ШЕШУ

Интегралдық теңдеулерді сандық жуықтау әдісімен шешудің әр түрлі жолдары бар. Ол әдістерді

$$\varphi(x)-\lambda\int_a^b K(x,s)\varphi(s)ds=f(x) \qquad (0.1)$$

Фредгольнің 2-текті интегралдық теңдеуін сандық жуықтау әдісімен шешу арқылы түсіндірейік.

§1. ШЕКТЕЛГЕН ҚОСЫЛҒЫШТАР ӘДІСІ

Бұл әдіс анықталған интегралды мынадай квадраттық функционалды жуықтап есептеуге

$$\int_a^b F(x)dx=\sum_{i=1}^{n}M_iF(x_i)+R_F \qquad (1.1)$$

негізделген, мұндағы $M_i(i=1,2,...,n)$- $[a,b]$ кесіндідегі $x_i(i=1,2,...,n)$ нүктелерінде тұрақты $F(x)$ функцияға тәуелсіз коэффициенттер, ал R_F - пайдаланып отырып әдіске байланысты болатын қатенің шамасы.

Бірдей қашықтықтағы $x_i = a+(i-1)h, h=\frac{b-a}{n}, (i=1,2,...,n)$ нүктелері үшін (1.1) функционалдағы M_i еселіктері мынадай мағыналы:

1) тіктөртбұрыштың функционалы үшін
$M_i = h_i, i=1,2,...,n-1, A_n = 0;$
2) трапециялардың жалпы функционалы үшін
$A = A_n - \frac{h}{2}, A_2 = A_3 = ... = A_{n-1} = h;$
3) Симпснның $n=2m+1$ болғандығы жаалпылама функционалы үшін
$A_1 = A_{2m+1} = \frac{h}{3}, A_2 = A_4 = ... = A_{2m} = \frac{4h}{3},$
$A_3 = A_5 = ... = A_{2m-1} = \frac{2h}{3}.$

Мынадай

$$\varphi(x_i)=\varphi_i, K(x_i,x_j)=K_{ij}, f(x_i)=f_i, i,j=1,2,...,n$$

белгілеулерін енгізіп, (1.1) функционалын пайдалана отырып (0.1) теңдеуінен әрбір x_i нүктедегі белгісіз φ_i функциялары үшін

$$\tilde{\varphi}_i - \lambda\sum_{j=1}^{n} M_j K_{ij}\tilde{\varphi}_j = f_i, i=1,2,...,n \qquad (1.2)$$

алгебралық теңдеулер жүйесін аламыз. Бұл (1.2) теңдеулер жүйесі алгебрадағы булгілі әдістердің біреуімен шешіледі.

Міне, осы (1.2) жүйесінен $\tilde{\varphi}_i$ функциясын тауып, $\varphi(x)$ үшін жуық аналитикалық

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda\sum_{j=1}^{n} M_j K(x,x_j)\tilde{\varphi}_j$$

шешімін анықтаймыз.

Мысал. $n=3$ үшін Симпсонның квадраттық функционалын пайдаланып

$$\varphi(x) - 0,5\int_0^1 xe^s\varphi(s)ds = e^{-x}$$

интегралдық теңдеуін шектелген қосылғыштар әдісімен шешейік.

Шешуі. Бірдей қашықтықта $x_1=0, x_2=0,5, x_3=1$ нүктелерін белгілеп алайық. Теңдеудегі $K(x,s)=xe^{-s}$ өзегі мен $f(x)=e^{-s}$ белгілі функциясының (x_i,s_j) және x_i нүктедегі мәндері төмендегі кестеде көрсетілген.

$K_{ij} = K(x_i,s_j)$

s_j \ x_i	0	0,5	1
0	0	0,5	1
0,5	0	0,8244	1,6487
1	0	1,3592	2,7183

$f_i = f(x_i)$

x_i	0	0,5	1
f_i	1	0,6065	0,3679

Бұл мысал үшін Симпсонның квадраттық функционалы

$$\int_a^b F(x)dx \cong \frac{1}{6}[F(0)+4F(0,5)+F(1)],$$

себебі $h=\frac{1}{2}, A_1=\frac{h}{3}=\frac{1}{6}, A_2=\frac{4h}{3}=\frac{2}{3}, A_3=\frac{h}{3}=\frac{1}{6}.$

Енді $\varphi(x)$ шешімінің $\tilde{\varphi}_i$ $i=1,2,3$ мәндерін (1.2) функционалы бойынша табу үшін кестеде берілген K_{ij}, f_i мәндерін пайдалансақ, онда мынадай

$$\begin{cases} y_1=1 \\ y_2-\frac{0,5}{6}(0,5y_1+3,2976y_2+1,3592y_3)=0,6065, \\ y_3-\frac{0,5}{6}(y_1+6,5948y_2+2,7183y_3)=0,3679 \end{cases}$$

алгебралық теңдеулер жүйесін аламыз. Осы теңдеулер жүйесінен

$$\tilde{\varphi}_1=1, \tilde{\varphi}_2=1,1079, \tilde{\varphi}_3=1,3706.$$

Демек, интегралдық теңдеудің жуық шешімі

$$\varphi(x)=e^{-x}+1,003x$$

болады.

Ескерту. Осы талдаған әдісімізді мына

$$\varphi(x)-\lambda\int_a^b K(x,s)\varphi(s)ds = f(x), a\le x\le b$$

Вольтерраның 2-текті интегралдық теңдеуіне де қолдануға болады, бірақ мұнда теңдеудің өзегі $K_{ij}=0, j\succ i.$

Себебі өзегі $K(x,s)$ болатын Вольтерра теңдеуін

$$K^*(x,s)=\begin{cases} K(x,s), a\le s\le x, \\ 0, x\prec s \end{cases}$$

өзекті Фредгольмнің 2-текті теңдеуіне келтіріледі.

§2. МОМЕНТТЕР ӘДІСІ

Бұл әдіс бойынша интегралдық тңедеудің жуық $\tilde{\varphi}(x)$ шешімін $f(x)$ функциясымен $[a,b]$ кесіндіде $\varphi_1(x), \varphi_{\grave{e}}(x), ..., \varphi_n(x)$ т.с.с. сызықтық тәуелсіз функциялардың сызықтық комбинация-сының қосындысы, яғни

$$\tilde{\varphi}(x)=\tilde{\varphi}_n(x)= f\left(x+\sum_{i=1}^n C_i\varphi_i(x)\right) \qquad (2.1)$$

түрінде іздейді, мұндағы $C_1, C_2, ..., C_n$ - белгісіз тұрақты шамалар. (2.1) жуық шешімін (0.1) теңдеуге қойып

$$R[\overline{\varphi}_n(x)]=\sum_{i=1}^n C_i\varphi_i(x)-\lambda\sum_{i=1}^n C_i\psi_i(x)-\lambda\int_a^b K(x,s)f(s)ds \qquad (2.2)$$

айырымын аламыз, мұндағы

$$\psi_i(x)=\int_a^b K(x,s)\varphi_i(s)ds, i=1,2,...,n.$$

Моменттер әдісі бойынша $C_1, C_2, ..., C_n$ белгісіз еселіктері айырымдар мен $\varphi_1(x), \varphi_ё(x), ..., \varphi_n(x)$ функциялардың әрқайсысына функционалдық шарттарынан пайда болатын теңдеулер жүйесінен

$$\int_a^b R[\overline{\varphi}_n(x)]\varphi_i(x)dx = 0, i = 1,2,...,n$$

анықталады. Бұл соңғы жүйені (2.2) функционалына пайдалансақ

$$\sum_{i=1}^{n} C_i(\alpha_{ij} - \lambda\beta_{ij}) = \gamma_i\lambda, i = 1,2,...,n \qquad (2.3)$$

теңдеулер жүйесін аламыз, мұнда

$$\alpha_{ij} = \int_a^b \varphi_1(x)\varphi_j(x)dx, \beta_{ij} = \int_a^b dx\int_a^b K(x,s)\varphi_i(s)\varphi_j(s)ds,$$

$$\gamma_i = \int_a^b dx\int_a^b K(x,s)f(s)\varphi_i(s)ds.$$

Егер (2.3) теңдеулер жүйесінің $D(\lambda) = \det(\alpha_{ij} - \beta_{ij})$ анықтауышы нөлге тең болмаса, онда $C_1, C_2, ..., C_n$ коэффициенттері бірмәнді анықталады, оларды (2.1) өрнегіне қойып, жоғарыда берілген (0.1) интегралдық теңдеудің жуық шешімін аламыз.

Мысал. Мына

$$\varphi(x) - \int_0^1 K(x,s)\varphi(s)ds = 1$$

теңдеудің жуық шешімін табайық, оның өзегі

$$K(x,s) = \begin{cases} (s-1)x, 0 \le x \le s, \\ s(x-1), s \le x \le 1. \end{cases}$$

өзектің мәнін теңдеуге қойсақ

$$\varphi(x) - \left(\int_0^x s(x-1)\varphi(s)ds + \int_x^1 (s-1)x\varphi(s)ds\right) = 1.$$

$\tilde{\varphi}(x) = \overline{\varphi}(x) = 1 + C_1x + C_2x^2$ деп белгілесек, онда айырым мынаған тең болады

$$R[\overline{\varphi}_2(x)] = C_1x + C_2x^2 - \left[(x-1)\left(C_1\frac{x^3}{3} + C_2\frac{x^4}{4}\right) + x\left(-\frac{C_1}{6}\right) - \right.$$
$$\left. - C_1\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right) - \frac{C_2}{12} + C_2\left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3}\right)\right] - \frac{(x-1)x^2}{2} + \frac{x(x-1)^2}{2}.$$

Ал $R[\overline{\varphi}_2(x)]$ айырымның x және x^2 функцияларға функционалдық шартынан

$$\begin{cases} \int_0^1 R[\overline{\varphi}_2(x)]xdx = 0, \\ \int_0^1 R[\overline{\varphi}_2(x)]x^2dx = 0. \end{cases}$$

теңдеулер жүйесін аламыз. Бұл жүйедегі интегралды есептеп

$$\begin{cases} 0{,}3555C_1 + 0{,}3146C_2 = -0{,}1167, \\ 0{,}2638C_1 + 0{,}2417C_2 = 0{,}025. \end{cases}$$

түрінде жазып, осы жүйенің $C_1 = 0{,}027, C_2 = -0{,}029$ шешімін табамыз. Сонда берілген интегралдық теңдеудің жуық шешімі

$$\varphi(x) = 1 + 0{,}027x - 0{,}029x^2$$

болады.

§Бубнов-Галеркин әдісі

Біртекті емес Фредгольмнің

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda\int_a^b K(x,s)\varphi(s)ds$$

2-текті интегралдық теңдеудің Бубнор-Галеркин әдісімен жуық шешімін табу үшін $L_2[a,b]$ кеңістігінде толық сызықты тәуелсіз $\{U_n(x)\}$ функциялар тізбегін таңдап алып, жуық шешімін $\varphi_n(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k u_k(x)$ (3.2) қосынды түрінде іздейді, ал мұндағы $a_1, a_2, ...a_n$ белгісіз коэффиценттерін $(\varphi_n(x), u_k(x)) - (f(x), u_k(x)) + \lambda\left(\int_0^1 K(x,s)\varphi_n(s)ds, u_k(x)\right), k = 1,2,...,n$ (3.3) алгебралық теңдеулер жүйесін анықтайды. Теңдеудегі $(f,g) = \int_z^b f(x)g(x)dx$ және $\varphi_n(x)$ орынан (3,2) қосындыны алу керек.

Егер (3,1! Теңдеудегі λ параметрі сипаттаушы сан болмаса, онда n жеткілікті үлкен шама болғанда, яғни $n \to \infty$ жағдайда (3,2) қосындысы $L_2[a,b]$ кеңістігіндегі өлшем бойынша (3,1) интегралдық теңдеудің дәл $\varphi(x)$ шешіміне жинақты болады.

Мысал $\varphi(x) = x + \int_{-1}^{1} xs\varphi(s)ds$ (3,4) теңдеуін Бубнов-Галеркин әдісімен шешейік. Шешуі. [-1.1] кеңістігіндегі толық $P_n(x), n = 0,1,2,...$ Лежандр полиномын таңдап алып, теңдеудің жуық шешімін $\varphi_n(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k P_k(x), n = 1,2,3$ қосынды түрінде қарастырайық, чғни /n=3 үшін/ $\varphi_n(x) = a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot x + a_3 \frac{3x^2 - 1}{2}$ түрінде іздейміз. Мұны (3,3! өрнекке қосайық

$a_1 + a_2 x + a_3 \frac{3x^2 - 1}{2} = x + \int_{-1}^{1} xs\left(a_1 + a_2 s + a_3 \frac{3s^2 - 1}{2}\right)ds$ немесе $a_1 + a_2 x + a_3 \frac{3x^2 - 1}{2} = x + x \cdot \frac{2}{3} a_2$

(3,5) Бұл (3,5) өрнегін біртіндеп 1,x, $\frac{3x^2 - 1}{2}$ функцияларына көбейтіп, x финымалы бойынша -1 ден 1-ге дейін интегралдық, сонда $\begin{cases} 2a_1 = 0, \\ \frac{2}{3}a_2 + \frac{9}{4}a_1, \\ \frac{2}{3}a_3 = 0. \end{cases}$

Енді осы соңғы жүйеден $a_1 = 0, a_2 = 3, a_3 = 0$ айқындаймыз, демек $\varphi_3(x) = 3x$. Ал бұл функция теңдеудің дәл шешімі болады.

Бубнов-Галекиннің жуықтап шешу әдісімен төменгі интегралдық теңдеуді шешіңіз.

3.1. $\varphi(x) = \int_{-1}^{1} (xs + x^2)\varphi(s)ds.$

3.2. $\varphi(x) = \int_{-1}^{1} (xs^2 + x\ )\varphi(s)ds + 1 + \frac{4}{3}x.$

3.3. $\varphi(x)=\int_{-1}^{1}x^2e^{xs}\varphi(s)ds+1-x(e-e^{-x}).$

§4. Ритца әдісі

Фредгольмнің 1-текті симметриялық өзекті $\varphi(x)=\lambda\int_a^b K(x,s)\varphi(s)ds$ (4,1) теңдеуінің Ритца әдісімен өзгенің меншікті сандары мен меншікті функцияларын анықтайық, мұндағы $K(x,s)=:(s,x)$-симметриялық өзек.

$L_2[a,b]$ кеңістігінде $\{\psi_n(x)\}$ толық сызықтық тәуелсіз координаталық функциялар жүйесін таңдап аламыз да, (4,1) теңдеуінің шешімін $\varphi_n(x)=\sum_{k=1}^{n}a_k\psi_k(x)$ (4,2) түрінде жазамыз, мұндағы $a_1,a_2,...a_n$ коэфиценттерін $\|\varphi_n\|=1$ шартын қанағаттандыратындай етіп анықтаймыз, сонымен қатар $(K\varphi_n,\varphi_n)$ квадраттық форманың тұрақтандырылған мәнін табамыз.

Нәтижеде a_k,σ /Лагранж/ коэффициенттерін анықтайтын біртекті алгебралық теңдеулер жүйесін аламыз:

$$\sum_{k=1}^{n}\{(K\psi_j,\psi_k)-\sigma(\psi_j,\psi_k)\}a_k=0,\ j=1,2,...,n. \qquad (4.3)$$

Бұл теңдеулер жүйесінің нөлдік шешімі болуы үшін

$$\begin{vmatrix}(K\psi_1,\psi_1)-\sigma(\psi_1,\psi_1)\cdots(K\psi_1,\psi_n)-\sigma(\psi_1,\psi_n)\\(K\psi_2,\psi_1)-\sigma(\psi_2,\psi_1)\cdots(K\psi_2,\psi_n)-\sigma(\psi_2,\psi_n)\\ \\(K\psi_n,\psi_1)-\sigma(\psi_n,\psi_1)\cdots(K\psi_n,\psi_n)-\sigma(\psi_n,\psi_n)\end{vmatrix}=0 \qquad (4.4)$$

орындалуы тиіс. Міне, осы анықтауыштан пайда болған көпмүшенің түбірлері $K(x,s)$ өзектің меншікті мәндерінің жуық шамаларын анықтайды. Осы (4.4) өрнегінен σ-ны тауып, оның сипаттаушы мәнін (4.3) теңдеуге қойсақ, $a_1,a_2,...,a_n$ коэффициенттердің нөлге тең емес жуық мәнін, ал (4.2) өрнегіне қойсақ, онда меншікті функцияның жуық мәнін табамыз.

Мысал. Мына $K(x,s)=xs$ өзектің $a=0,b=1$ шекаралық жағдайдағы меншікті сандары мен меншікті функцияларын Ритца әдісімен анықтайық.

Шешуі $[0,1]$ кесіндіде Ритца әдісінің шартын қанағаттандыратын $\psi_n(x)$ координаталық функциялар үшін $\psi_n(x)=P_n(2x-1)$ Лежандр полиномдарын алып, (4.2) өрнектен

$$\psi_2(x)=a_1P_0(2x-1)+a_2P_1(2x-1),$$

Яғни $n=2$ үшін жазсақ

$$\psi_1(x)=P_0(2x-1)=1,\ \psi_2(x)=P_1(2x-1)=2x-1,$$

бұлардан

$$(\psi_1,\psi_1)=\int_0^1 dx=1,(\psi_1,\psi_2)=\int_0^1(2x-1)dx=1,$$

$$(\psi_2,\psi_2)=\int_0^1(2x-1)^2dx=\frac{1}{3},$$

$$(K\psi_1,\psi_1)=\int_0^1\left(\int_0^1 K(x,s)\psi_2(s)ds\right)\psi_1(x)dx=\int_0^1\int_0^1 xsdxds=\frac{1}{4},$$

$$(K\psi_1,\psi_2)=\int_0^1\int_0^1 xs(2x-1)dxds=\frac{1}{12},$$

$$(K\psi_2,\psi_2)=\int_0^1\int_0^1 xs(2s-1)(2x-1)dxds=\frac{1}{36},$$

Ал (4.4) жүйесі бойынша

$$\begin{vmatrix}\frac{1}{4}-\sigma & \frac{1}{12}\\ \frac{1}{12} & \frac{1}{36}-\frac{\sigma}{3}\end{vmatrix}=0$$

немесе $\sigma^2-\sigma\left(\frac{1}{12}+\frac{1}{4}\right)=0\Rightarrow\sigma_1=0,\sigma_2=\frac{1}{3}.$

Бұл түбірлердің ең үлкені $\sigma_2=\frac{1}{3}$, ендеше ең кіші сипаттаушы саны $\lambda=\frac{1}{\sigma^2}=3$ болады. Бұл $\sigma=\frac{1}{3}$ шамасын (4.3) жүйеге қойсақ, $a_1=a_2$, ал одан $\varphi(x)=2x$ меншікті функциясын анықтаймыз.

Ритца әдісі бойынша мына өзектердің $/a=0,b=1$ үшін/ ең кіші сипаттаушы сандарын анықтаймыз.

4.1. $K(x,s)=x^2s^2$.

4.2. $K(x,s)=\begin{cases}\frac{1}{2}x(2-s), x\geq s,\\ \frac{1}{2}s(2-x), x\geq s.\end{cases}$

4.3. $K(x,s)=\begin{cases}\frac{1}{2}x(2-s), x\geq s,\\ \frac{1}{2}s(2-x), x\geq s.\end{cases}$

ПАЙДАЛАНЫЛҒАН ӘДЕБИЕТТЕР

1. Орынбасаров М.О., Сахаев Ш.С., Методическая разработка по решению линейных интегральных уравнений. – Алматы: Изд-во КазГУ /1987/, с. 31.

2. Орынбасаров М.О., Сахаев Ш.С., Интегралдық теңдеулер. – Алматы, «Білім» баспасы, 1994, 140 бет.

3. Краснов М.Л., Кисилев А.Н., Макаренко Г.И., Интегральные уравнения, 2-ое изд. М., 1976, изд-во «Наука».

4. Михлин С.Г., Лекции по линейным интегральным уравнениям, физмат-гиз, 1959.

5. Под редакцией В.С.Владимиров, Сборник задач по уравнениям математической физики, М., 1974.

6. Березин И.С., Жидков Н.П., Методы вычисления, т. 2, М., 1962.